人文 (24) 略解 (v-4.0)

人文１

[1]

[1-1]　固有値は $\lambda_1 = 1.32$, $\lambda_2 = 0.68$。対応する固有ベクトルは $\boldsymbol{a} = \pm\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \pm\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$。

[1-2]　第 1，第 2 主成分の寄与率はそれぞれ 0.66，0.34。主成分負荷量は $\rho_{1,1} \approx \pm 0.812$。

[2]

[2-1]　第 1 主成分の寄与率は 0.734，第 2 主成分までの累積寄与率は 0.982。第 1 主成分は合計得点。第 2 主成分は文系（国語，英語，社会）と理系（数学，理科）の違い。

[2-2]　上側 20%の生徒の得点は約 1.609。第 1 主成分と合計得点 T との間の相関係数は $r_{zT} \approx -1.000$。

[3]　合計得点が高く，科目に関しては特徴がないので図 1 の 10 番の生徒が当てはまる。

人文２

【ア】100，【イ】320，【ウ】0.1314 (13.14%)，【エ】115，【オ】50，
【カ】8^2，【キ】0.0062，【ク】58，【ケ】54.8

人文３

[1] $E[X_i]=\dfrac{3}{5}$, $V[X_i]=\dfrac{6}{25}$

[2] $E[X_iX_j]=\dfrac{1}{3}$, $Cov[X_i,X_j]=-\dfrac{2}{75}$, $R[X_i,X_j]=-\dfrac{1}{9}$

[3] $E[T_5]=3$, $V[T_5]=\dfrac{2}{3}$

[4] $P(T_5=5)=\dfrac{1}{42}\approx 0.024$

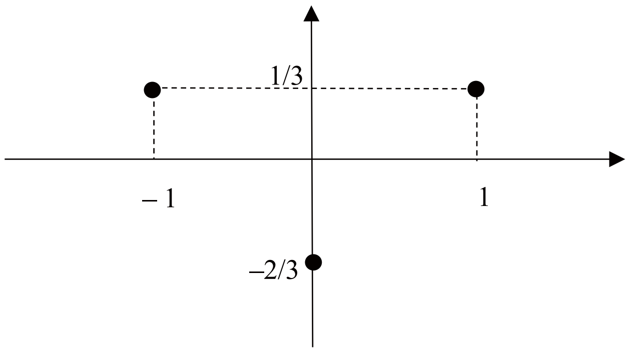
[5] 最小の数は $M=7$

人文４

[1]

[1-1] $P=\dfrac{2}{9}\begin{pmatrix} 5 & -4 & -1 \\ -4 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

[1-2] $\tilde{X}=\begin{pmatrix} 1 & 1/3 \\ -1 & 1/3 \\ 0 & -2/3 \end{pmatrix}$ で，布置は以下。



[2]

[2-1] $D = diag(XX^T)\mathbf{1}_n\mathbf{1}_n{}^T + \mathbf{1}_n\mathbf{1}_n{}^T diag(XX^T) - 2XX^T$

[2-2] $P = (Q_nX)(Q_nX)^T$

[3] 主成分分析の主成分得点と多次元尺度法での布置は，同じもしくはそれを直交回転したものを与える。

社会 (24) 略解 (v-4.0)

社会１

[1]　問題文の式 (3) を問題文の式 (2) に代入することで証明できる。

[2]

[2-1]　母平均の推定値は $\bar{X}_{\mathrm{st}} = 6.82$。

[2-2]　各大学への標本の配分数は，それぞれ $n_1 = 32$，$n_2 = 108$，$n_3 = 88$，$n_4 = 72$。

[2-3]　$V[\bar{X}_{\mathrm{st}}] = 0.0075$

[3]

[3-1]　$V[\bar{X}_{st}^{M}] = 0.0128$

[3-2]　$V[\bar{X}_{st}^{P}] = 0.0272$

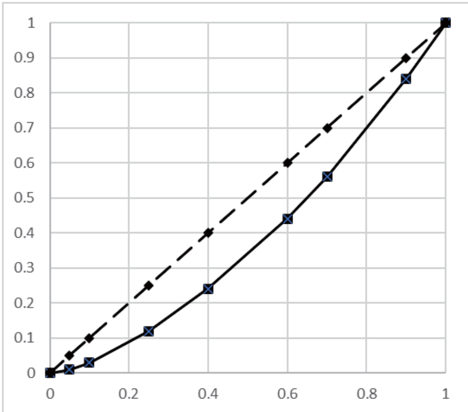
[3-3]　$\alpha_1 = 0.68$，$\alpha_2 = 0.32$ のとき $V[\hat{\mu}]$ は最小で，そのとき $V[\hat{\mu}] \approx 0.0087$。

社会２

[1]

ポイント	1	2	3	4	5	6	7	8
累積人数比率	0.05	0.1	0.25	0.4	0.6	0.7	0.9	1
累積ポイント比率	0.01	0.03	0.12	0.24	0.44	0.56	0.84	1

ローレンツ曲線は以下。



[2]

[2-1]　ジニ係数は $Gini = x_1 y_2 + x_2(y_3 - y_1) + x_3(1 - y_2) - y_3$。

[2-2]　ジニ係数は $Gini = 0.208$。

[2-3]　データ 1 のジニ係数が最大で，その値は $Gini = 0.22$。

社会３（理工３と同じ）

[1] AR(2) モデルの定常性の条件は $\phi_1+\phi_2<1,\ \ -\phi_1+\phi_2<1,\ \ -1<\phi_2<1$ で，$\phi_1=1, \phi_2=-0.4$ はそれを満たす。

[2] $\rho(1)=\dfrac{\phi_1}{1-\phi_2}$， $\rho(2)=\phi_2+\dfrac{\phi_1^2}{1-\phi_2}$， $\rho(3)=\dfrac{\phi_1^3+2\phi_1\phi_2-\phi_1\phi_2^2}{1-\phi_2}$

[3] $\phi_{11}=\rho(1)=\dfrac{\phi_1}{1-\phi_2}$， $\phi_{22}=\dfrac{-\rho(1)^2+\rho(2)}{1-\rho(1)^2}$， $\phi_{33}=0$。

[4] 自己相関 $\rho(k)$ は, 確率変数 x_t と x_{t-k} の相関の強さを表す。偏自己相関 ϕ_{kk} は, $x_{t-1}, x_{t-2}, \ldots, x_{t-k+1}$ を経由することなく，x_{t-k} と x_t の直接的な相関を表している。

[5] $\hat{\phi}_1=\dfrac{\hat{\rho}(1)(1-\hat{\rho}(2))}{1-\hat{\rho}(1)^2}$， $\hat{\phi}_2=\dfrac{\hat{\rho}(2)-\hat{\rho}(1)^2}{1-\hat{\rho}(1)^2}$

社会４

[1] 強化プログラムでは，変化量の平均は 2 で，分散は 84。普通プログラムの変化量の平均は 1 で，分散は同じく 84。

[2] 検定統計量の値は，$t^* \approx 0.345$ で，自由度 38 の t 分布の両側 5%点は約 2.0 なので，有意水準 5%で検定は有意でない。

[3] $y = 37 + 0.4x$

[4] $m_1 = 54$，$m_0 = 59$。両プログラムでの条件付き期待値の差の検定統計量の値は -2.03 となり，自由度がある程度大きな t 検定では 5%有意となる。

[5] 上問 [2] より，テスト得点の変化量の平均は強化プログラムのほうが 1 点高かったが検定は有意でなく，両群間に差はない。しかし，上問 [4] では，講習前のテスト得点が同じ x_0 である社員の講習後のテスト得点の条件付き期待値は，x_0 の値によらず普通プログラムのほうが大きい。検定の定式化により結果が変わってしまう。

理工 (24) 略解 (v-4.0)

理工１

[1]　まず A の水準の順番をランダムに決め，A の水準ごとに，B，C の水準組合せの順番をランダムに決めて焼成を行う。

[2]　$y_{ijkl} = \mu + \rho_l + \alpha_i + \varepsilon_{(1)il} + \beta_j + \gamma_k + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\alpha\beta\gamma)_{ijk} + \varepsilon_{(2)ijkl}$

[3]　$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + \varepsilon_{ijk}$

[4]　$E[S_{E(1)}] = 12\sigma_{(1)}^2 + 2\sigma_{(2)}^2$，$E[S_A] = 18(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) + 6\sigma_{(1)}^2 + \sigma_{(2)}^2$。

[5]　（ア）11.674,（イ）1,（ウ）11.674,（エ）1.778,（オ）13.133,（カ）2,（キ）6.567
要因 A（焼成温度）のセラミック強度への効果は有意ではない。また，要因 A の変化によるばらつきのうち反復によるばらつきとして説明される部分が比較的大きい。

理工２

[1]

[1-1]　$F(t)=1-\exp\{-t\exp(\alpha+\beta x)\}$

[1-2]　$L(\alpha,\beta)=\prod_{i=1}^{4}\exp(\alpha+\beta x_i)\exp\{-T_i\exp(\alpha+\beta x_i)\}$

[1-3]　最尤推定値はそれぞれ $\hat{\theta}_0=\dfrac{2}{51}\approx 0.039$，$\hat{\theta}_1=\dfrac{2}{21}\approx 0.095$。$\alpha$，$\beta$ の最尤推定値はそれぞれ $\hat{\alpha}\approx -3.24$，$\hat{\beta}\approx 0.89$。

[2]

[2-1]　$L(\alpha,\beta,\gamma)=\prod_{i=1}^{4}\gamma T_i^{\gamma-1}\exp(\alpha+\beta x_i)\exp\{-T_i^{\gamma}\exp(\alpha+\beta x_i)\}$

[2-2]　ヘッセ行列は

$$\nabla\nabla^T l(\boldsymbol{\theta})=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -4/\gamma^2\end{pmatrix}-\sum_{i=1}^{4}\exp(\boldsymbol{\theta}^T\boldsymbol{z}_i)\boldsymbol{z}_i\boldsymbol{z}_i^T$$

となる。任意のベクトル $\boldsymbol{v}=(v_1,v_2,v_3)^T\neq\boldsymbol{0}$ に対して，

$$\boldsymbol{v}^T\{\nabla\nabla^T l(\boldsymbol{\theta})\}\boldsymbol{v}=-\frac{4}{\gamma^2}v_3^2-\sum_{i=1}^{4}\exp(\boldsymbol{\theta}^T\boldsymbol{z}_i)\cdot(\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{z}_i)^2$$

であり，少なくとも 1 つの i に対し $\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{z}_i\neq 0$ であるので，$\boldsymbol{v}^T\{\nabla\nabla^T l(\boldsymbol{\theta})\}\boldsymbol{v}<0$ となる。よって，ヘッセ行列は負定値である。

理工３（社会３と同じ）

[1]　AR(2) モデルの定常性の条件は $\phi_1+\phi_2<1,\quad -\phi_1+\phi_2<1,\quad -1<\phi_2<1$ で，$\phi_1=1, \phi_2=-0.4$ はそれを満たす。

[2]　$\rho(1)=\dfrac{\phi_1}{1-\phi_2}$，$\rho(2)=\phi_2+\dfrac{\phi_1^2}{1-\phi_2}$，$\rho(3)=\dfrac{\phi_1^3+2\phi_1\phi_2-\phi_1\phi_2^2}{1-\phi_2}$

[3]　$\phi_{11}=\rho(1)=\dfrac{\phi_1}{1-\phi_2}$，$\phi_{22}=\dfrac{-\rho(1)^2+\rho(2)}{1-\rho(1)^2}$，$\phi_{33}=0$。

[4]　自己相関 $\rho(k)$ は, 確率変数 x_t と x_{t-k} の相関の強さを表す。偏自己相関 ϕ_{kk} は, $x_{t-1}, x_{t-2}, \ldots, x_{t-k+1}$ を経由することなく，x_{t-k} と x_t の直接的な相関を表している。

[5]　$\hat{\phi}_1=\dfrac{\hat{\rho}(1)(1-\hat{\rho}(2))}{1-\hat{\rho}(1)^2}$，$\hat{\phi}_2=\dfrac{\hat{\rho}(2)-\hat{\rho}(1)^2}{1-\hat{\rho}(1)^2}$

理工４

[1]

[1-1]　$a = \overline{y} - b\overline{x}$，　$b = \dfrac{\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}(y_{ij} - \overline{y})(x_{ij} - \overline{x})}{\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}(x_{ij} - \overline{x})^2}$

[1-2]　予測値 $\hat{y}_{ij} = a + bx_{ij}$ の平均は $\dfrac{1}{mn}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\hat{y}_{ij} = (\overline{y} - b\overline{x}) + b\overline{x} = \overline{y}$ と観測値の平均に等しくなる。予測値と残差の偏差積和は 0 となるので，予測値と残差との相関は 0。

[1-3]　全偏差平方和 S_T の変形により $S_T = S_M + S_R$ が示される。

[2]

[2-1]　$a = \overline{y} - b\overline{x}$，　$b = \dfrac{\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}(y_{ij} - \overline{y}_j)(x_{ij} - \overline{x}_j)}{\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}(x_{ij} - \overline{x}_j)^2}$，　$g_j = (\overline{y}_j - \overline{y}) - b(\overline{x}_j - \overline{x})$

[2-2]　$E[Y_{ij}^{(A)}] = \alpha + \beta x_{ij}$

[3]

[3-1]　Y_{ij} は $N(\alpha + \beta x_{ij}, \tau^2 + \sigma^2)$ に従う。

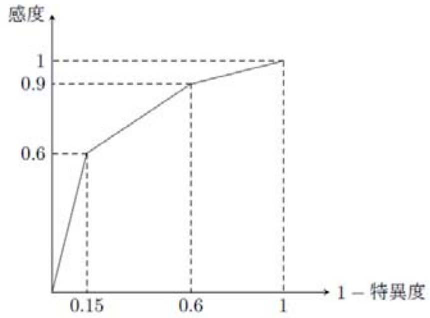
[3-2]　B さん提案の重み付き平均は妥当で，n が大きくなるほど $\overline{y}_j$ の精度が上がることからその比重は大きくなり，その意味でも理にかなった推定値となる。

医薬１

[1]

[1-1] (a) 0.6, (b) 0.85, (c) 0.8, (d) 0.68

[1-2] ROC 曲線は以下。曲線下面積は 0.7625。



[2]

[2-1] $E[Z_i] = \pi_{10} - \pi_{01}$, $V[Z_i] = \pi_{10}(1-\pi_{10}) + \pi_{01}(1-\pi_{01}) + 2\pi_{10}\pi_{01}$

[2-2] $W = \dfrac{(n_{10} - n_{01})^2}{n_{10} + n_{01}}$

[3]

[3-1] 帰無仮説の下で W は近似的に自由度 1 のカイ二乗分布に従う。

[3-2] $W \approx 2.38 < 3.84$ であるため帰無仮説は棄却されない。

医薬２

[1]　$V[\hat{\delta}_d] = \dfrac{2\sigma^2}{n}$

[2]　$V[\hat{\delta}_c] = \dfrac{4\sigma^2(1-\rho)}{n}$

[3]

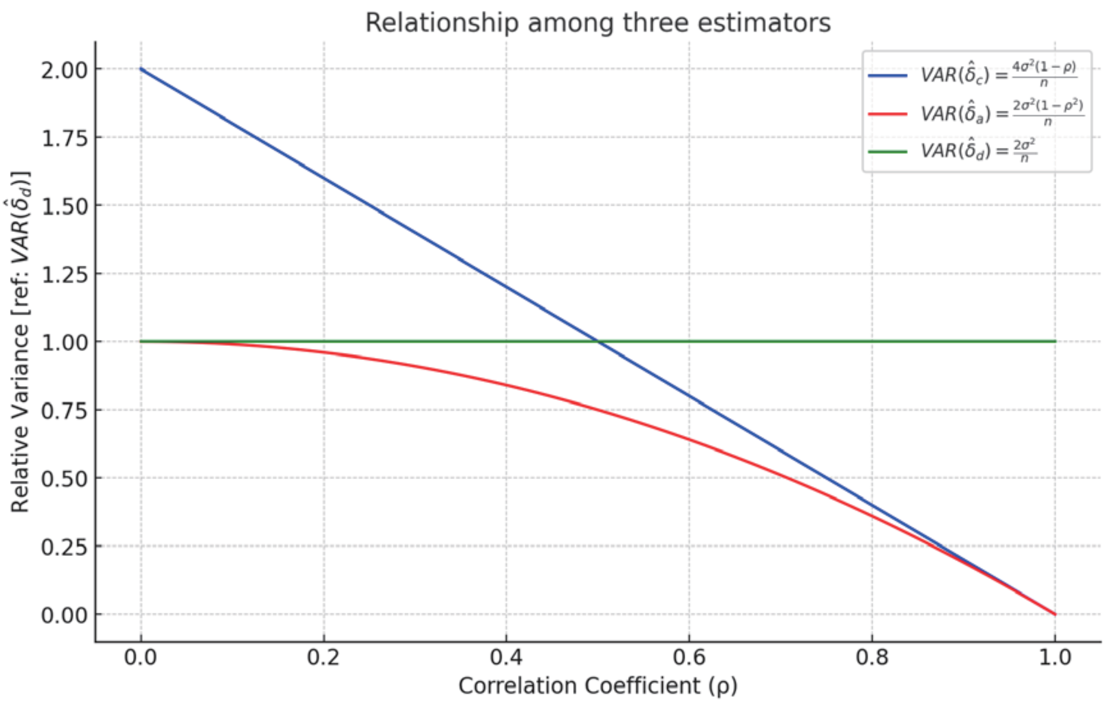
[3-1]　$c_1 = 1$,　$c_2 = -1$,　$c_3 = -\rho$,　$c_4 = \rho$

[3-2]　$V[\hat{\delta}_a] = \dfrac{2\sigma^2(1-\rho^2)}{n}$

[4]　$E[\hat{\delta}_d] = E[\hat{\delta}_c] = E[\hat{\delta}_a]$ となる条件は $\mu_T^X - \mu_C^X = 0$。

[5]　$\dfrac{V[\hat{\delta}_d]}{V[\hat{\delta}_d]} = 1$,　$\dfrac{V[\hat{\delta}_c]}{V[\hat{\delta}_d]} = 2(1-\rho)$,　$\dfrac{V[\hat{\delta}_a]}{V[\hat{\delta}_d]} = 1-\rho^2$

グラフは次のようになる。



医薬３

[1] カイ二乗統計量 $Y = 12.5$ は自由度 1 のカイ二乗分布の上側 5%点の 3.84 より大きいため，治療群と欠測の有無が独立であるという帰無仮説は棄却される。

[2] $(a) = 0.003732$， $(b) = 0.003871$， $(c) = 0.003718$

[3] $\hat{V}[\overline{\theta}] \approx 0.003907$

[4] $V[\hat{\theta}_k \mid Y_T^o = y_T^o, Y_C^o = y_C^o] = \dfrac{(M_T y_T^o / N_T)(1 - y_T^o / N_T)}{(N_T + M_T)^2} + \dfrac{(M_C y_C^o / N_C)(1 - y_C^o / N_C)}{(N_C + M_C)^2}$

[5] $E[B] = \dfrac{(M_T y_T^o / N_T)(1 - y_T^o / N_T)}{(N_T + M_T)^2} + \dfrac{(M_C y_C^o / N_C)(1 - y_C^o / N_C)}{(N_C + M_C)^2}$

医薬４

[1] FWER は $1-0.975^3 \approx 0.073$ （小数第 4 位を四捨五入）。

[2] 調整有意水準は $\alpha/3$。

[3] 次の 2 つが条件になる。

(1) $\mu_0 = \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$

(2) $H_{01}:\mu_0 = \mu_1$， $H_{02}:\mu_0 = \mu_2$， $H_{03}:\mu_0 = \mu_3$ の帰無仮説のうちいずれか 1 つだけが正しい

[4] $R[Z_j, Z_k] = \dfrac{\sqrt{n_j n_k}}{\sqrt{(n_j + n_0)(n_k + n_0)}}$

[5] $(c_0, c_1, c_2 c_3) = \left(-\dfrac{3}{2\sqrt{5}}, -\dfrac{1}{2\sqrt{5}}, \dfrac{1}{2\sqrt{5}}, \dfrac{3}{2\sqrt{5}}\right)$

[6] 相関係数は約 0.775。

共通 (24) 略解 (v-4.0)

[1] $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{1-r_{12}^2} \begin{pmatrix} r_{y1} - r_{12} r_{y2} \\ -r_{12} r_{y1} + r_{y2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 \\ -0.4 \end{pmatrix}$

[2] $r_{12} > \dfrac{r_{y2}}{r_{y1}}$

[3] $r_{12} > \dfrac{r_{y2}}{r_{y1}}$

[4] $V[\hat{y}] = 0.48$, $Cov[y, \hat{y}] = 0.48$

[5] $R_2^2 = 0.48$